

## МЕХАΝІКА

УДК 532.529

ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ТРУБКЕ  
С ШЕРОХОВАТОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТЕНКОЙ

Ф.А.АБДУЛЛАЕВ, Р.Ю.АМЕНЗАДЕ, М.Б.АХУНДОВ

*Бакинский Государственный Университет*  
*mexanika.bsu.az@mail.ru*

*Дано точное аналитическое решение одномерной линеаризованной задачи о пульсирующем течении идеальной несжимаемой жидкости в полубесконечной упругой тонкостенной трубке с учетом эффекта шероховатости внутренней стенки. Поставленная задача приводит к решению сингулярной краевой задачи Штурма-Лиувилля, которая, в свою очередь, сводится к интегральному уравнению типа Вольтера. Для описания давления, скорости жидкости и перемещения на торце трубки задано пульсирующее давление. Численно выявлено влияние шероховатости на скорость распространения волны.*

**Ключевые слова:** шероховатость, скорость волны, сингулярная краевая задача Штурма-Лиувилля, интегральное уравнение Вольтера, признак Вейерштрасса.

Проблема распространения волн в деформируемых оболочках с протекающей в полости жидкостью является весьма актуальной. Это связано с широким распространением в технике и живых организмах явления переноса. Исследованию подобного рода задач посвящено большое количество работ [1-4], в которых предполагалось, что внутренняя поверхность трубки абсолютно гладкая. Однако, в силу различных причин, в ряде случаев поверхностные эффекты, связанные с наличием внутренней шероховатости, являются весьма существенными. Это обстоятельство приводит к необходимости постановки и решения особого класса задач. В этой связи целью данной работы является анализ влияния этого обстоятельства на волновые характеристики системы «трубка-жидкость».

**Основные теоретические положения.** Рассмотрим распространение волн давления в прямой тонкостенной полубесконечной упругой

трубке постоянного радиуса  $R$ , у которой модуль упругости  $E$  не зависит от продольной координаты  $x \in [0, \infty)$ . Жидкость считается идеальной, однородной и несжимаемой с плотностью  $\rho_f$ . Предполагается также, что длины волн велики по сравнению с диаметром трубки. Поэтому течение жидкости может быть описано продольной составляющей скорости  $u(x, t)$ , где  $t$  - время. В этой одномерной постановке полагается, что давление  $p = p(x, t)$ , а радиальное смещение стенки  $w = w(x, t)$ . Тогда уравнение неразрывности имеет вид [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

а уравнение количества движения есть [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Шероховатость внутренней поверхности трубки будем моделировать посредством затухающе-осцилирующей зависимости внутренней толщины  $-h$  от координаты  $x$ , т.е.  $-h = -h(x)$ . Не умоляя общности, функцию  $-h(x)$  представим посредством равенства  $-h(x) = -h_0 g(x)$  и примем, что функция  $g(x)$  дважды дифференцируема, а  $h_0$  - характерное значение толщины. Тогда полная толщина записывается как  $2h(x) = h_0 \{1 + g(x)\}$ . Установим далее необходимые для последующих рассуждений свойства функции  $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g''(x) = 0. \quad (3)$$

В равенствах (3) штрихи означают дифференцирование по  $x$ . Заметим, что условия полагают отсутствие шероховатости на бесконечности. Простым примером такой функции является

$$g(x) = 1 + e^{-\alpha x} \sin \beta x, \quad (4)$$

в которой  $\alpha$  положительная величина, которая в численных расчетах должна удовлетворять неравенству  $\alpha \ll 1$ , чтобы уловить влияние шероховатости на расстояниях, достаточно удаленных от торца трубки, а  $\beta$  - параметр периодичности распределения шероховатости по длине трубки. Кроме того, следуя общей теории цилиндрических оболочек, напомним

$$-\frac{N}{R} + p = h_0 \{1 + g(x)\} \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (5)$$

В уравнении (5)  $N$  - усилие, а  $\rho_*$  - плотность материала стенки. Учитывая равенства

$$N = \int_{-h_0 g(x)}^{h_0} \sigma dz, \text{ а } \sigma = E \frac{w}{R},$$

получим

$$N = \frac{w}{R} E \{1 + g(x)\} h_0.$$

Введем безразмерные величины соотношениями

$$\bar{N} = \frac{N}{ER}, \quad \bar{p} = \frac{p}{E}, \quad t = t_0 \tau \quad \left( t_0^2 = \frac{h_0^2}{c_0^2}, \quad \text{где } c_0^2 = \frac{E}{\rho_f} \right), \quad \frac{h_0}{R} = \xi, \quad x = \bar{x} h_0,$$

$$\bar{u} = u \frac{t_0}{h_0}, \quad \rho = \frac{\rho_*}{\rho_f}, \quad \bar{w} = w h_0, \quad \bar{\alpha} = \alpha h_0, \quad \bar{\beta} = \beta h_0,$$

при которых, опуская для простоты записи черточки, получим следующую замкнутую систему уравнений гидроупругости

$$p = \{1 + g(x)\} \left( \xi^2 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right), \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + 2\xi \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

а формула (4) остается прежней при условии, что в ней фигурируют безразмерные величины. Здесь безразмерное дифференцирование осуществлялось по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}.$$

Комбинируя уравнения (5) и (7), после ряда преобразований, получим

$$\begin{aligned} & \{1 + g(x)\} \left( \xi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \tau^2} \right) + 2g'(x) \left\{ \xi^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \rho \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \tau^2} \right\} + \\ & + g''(x) \left\{ \xi^2 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right\} - 2\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Используемая здесь модель обобщает ранее предложенные. Так, например, пренебрегая динамическими эффектами ( $\rho = 0$ ) и шероховатостью ( $g(x) = 1$ ) для скорости распространения волны получим формулы Моэнса-Кортвега  $\tilde{c} = \sqrt{\xi}$ .

**Сведение решения к сингулярной краевой задаче Штрума-Лиувилля.** Ищем значение прогиба  $w$ , при котором возможны установившиеся колебания. Тогда частное решение уравнения (8) отыскиваем в виде

$$w = w_0(x)\exp(i\omega\tau), \quad (9)$$

где  $i$ -мнимая единица,  $w_0$ -искомая функция, а  $\omega$ -задаваемая круговая частота, связанная с размерной  $\Omega$  равенством  $\omega = \Omega t_0$ . Подставляя выражение (9) в (8) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$G_1(x)w_0'' + G_2(x)w_0' + G_3(x)w_0 = 0. \quad (10)$$

Здесь принято

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \{1 + g(x)\}(\xi^2 - \rho\omega^2), \quad G_2(x) = 2g'(x)(\xi^2 - \rho\omega^2), \\ G_3(x) &= g''(x)(\xi^2 - \rho\omega^2) + 2\xi\omega^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя замену Лиувилля

$$y(x) = w_0 \exp \frac{1}{2} \int \frac{G_2(x)}{G_1(x)} dx = w_0 \exp \int \frac{g'(x)}{1 + g(x)} dx = w_0 \{1 + g(x)\}, \quad (12)$$

получим приведенную форму волнового уравнения

$$y'' + I(x)y = 0 \quad (13)$$

при инварианте

$$I(x) = \frac{G_3}{G_1} - \frac{1}{4} \left( \frac{G_2}{G_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{G_2}{G_1} \right)',$$

который с учетом (11) переходит в следующее выражение

$$I(x) = \frac{2\xi\omega^2}{\{1 + g(x)\}(\xi^2 - \rho\omega^2)}. \quad (14)$$

При этом скорость распространения волны

$$c = \frac{\omega}{\sqrt{I(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \sqrt{\{1 + g(x)\}(\xi^2 - \rho\omega^2)} \quad (15)$$

зависит от  $x$  и является локальной волновой характеристикой.

Из (14) имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = \delta^2 = \frac{\xi\omega^2}{\xi^2 - \rho\omega^2}. \quad (16)$$

Теперь приняв обозначение [6]

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2}, \quad (17)$$

уравнение (13) приведем к виду

$$y'' + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y. \quad (18)$$

Задача нахождения функции  $y$  сводится к решению этого уравнения при следующих краевых условиях

$$y(0) = y_0, \quad y_{x \rightarrow \infty} \sim Ce^{-i\delta x}, \quad C = \text{const}. \quad (19)$$

Ход вычисления значения  $y_0$  зависит от режима функционирования системы и будет изложен ниже. Второе соотношение (19) является условием излучения Зоммерфельда, с помощью которого достигается единственность решения. Краевая задача (18)-(19) есть сингулярная задача Штрума-Лиувилля. На потенциал  $q(x)$  наложим условие интегрируемости

$$\int_0^\infty |q(x)| dx < +\infty. \quad (20)$$

Покажем, что построенная по формуле (17) функция  $q(x)$  при (4) удовлетворяет условию (20). Прежде всего вычислим

$$\delta^2 - I(x) = \frac{\xi \omega^2}{\xi^2 - \rho \omega^2} \left\{ 1 - \frac{2}{1 + g(x)} \right\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty |\delta^2 - I(x)| dx = \frac{\xi \omega^2}{\delta^2 (\xi^2 - \rho \omega^2)} \int_0^\infty \left| \left\{ 1 - \frac{2}{1 + g(x)} \right\} \right| dx.$$

Оценим интеграл

$$\int_0^\infty \left| 1 - \frac{2}{1 + g(x)} \right| dx = \int_0^\infty \left| \frac{g(x) - 1}{1 + g(x)} \right| dx.$$

Подставляя сюда выражение для  $g(x)$ , находим

$$\int_0^\infty \left| \frac{e^{-\alpha x} \sin \beta x}{2 + e^{-\alpha x} \sin \beta x} \right| dx \leq \int_0^\infty |e^{-\alpha x} \sin \beta x| dx \leq \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx < +\infty.$$

Отсюда следует сходимость интеграла (20).

**Эквивалентное интегральное уравнение.** Целесообразно решение краевой задачи (18)-(19) свести к решению интегрального уравнения. Однородное уравнение

$$y'' + \delta^2 y = 0 \quad (21)$$

имеет фундаментальную систему решений

$$y_1 = e^{-i\delta x}, \quad y_2 = e^{i\delta x}.$$

Рассматривая (21) как неоднородное уравнение с известной правой частью  $\delta^2 q(x)$  и применяя метод вариации произвольных постоянных, решение задачи сводим к решению эквивалентного интегрального уравнения

$$y(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^\infty \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta.$$

Постоянную  $C$  определим таким образом, чтобы удовлетворить первому условию (19). Для этого запишем выражения

$$C = \frac{y_0}{f(0, -\delta)}, \text{ а } y = y_0 \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}.$$

Очевидно, что введенная таким образом функция  $y(x, -\delta)$  является решением краевой задачи, а новая функция  $f(x, -\delta)$  определяется из решения интегрального уравнения

$$f(x, -\delta) = e^{-i\delta x} + \delta \int_x^\infty \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta. \quad (22)$$

Оно является уравнением типа Вольтера и может быть решено методом последовательных приближений

$$f(x, -\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f_n(x, -\delta). \quad (23)$$

В разложении (23) имеем совокупность рекуррентных соотношений

$$f_0 = e^{-i\delta x} \\ \dots\dots\dots \quad (24)$$

$$f_n = \int_x^\infty \sin \delta(\eta - x) q(\eta) f_{n-1}(\eta, -\delta) d\eta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

В силу неравенства (20) по признаку Вейерштрасса [7] из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (22) определяется выражением (23). Непосредственной проверкой можно установить, что это решение является также решением уравнения (18). Из структуры ряда (23) следует, что ряды полученные его почленным дифференцированием по  $x$ , также сходятся равномерно. Проведя однократное дифференцирование, запишем

$$f'(x, -\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f'_n(x, -\delta).$$

Здесь

$$f'_0(x, -\delta) = -i\delta e^{-i\delta x}$$

.....

$$f'_n(x, -\delta) = -\delta \int_x^\infty \cos \delta(\eta - x) q(\eta) f_{n-1}(\eta, -\delta) d\eta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Определяя из (12) функцию  $w_0$  и подставляя ее в (9), перемещение можно записать в виде

$$w = \frac{y_0}{1 + g(x)} \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} \exp(i\omega t). \quad (25)$$

Для определения  $y_0$  на торце трубки  $x = 0$  зададим пульсирующее давление

$$p(0, t) = p_0 \exp(i\omega\tau), \quad (26)$$

где  $p_0$  - задаваемая эмпирическая величина, отнесенная к модулю упругости  $E$ . Подставляя (25) в уравнение (6) и сравнивая полученный результат с (26), находим

$$y_0 = \frac{P_0}{(\xi^2 - \rho\omega^2)},$$

откуда

$$p = p_0 \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} \exp(i\omega\tau), \quad (27)$$

$$w = \frac{p_0}{\{1 + g(x)\}(\xi^2 - \rho\omega^2)} \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} \exp(i\omega\tau). \quad (28)$$

Используя первое уравнение (7), получим выражение для скорости  $u(x, t)$

$$u = i \frac{p_0}{\omega} \frac{f'(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} \exp(i\omega\tau). \quad (29)$$

Формулы (27)-(29) позволяют заключить, что ряд (23) в сочетании с соотношениями (24) дают конструктивное замкнутое аналитическое решение задачи. Отметим, что физическую величину, в силу линейности, представляют реальные части построенного решения.

**Численный расчет.** Для численной реализации в качестве примера оценим влияние шероховатости на скорость распространения волны. Очевидно, что она зависит от характерных параметров системы. Приведем здесь расчеты для значений  $\xi = 5 \cdot 10^{-2}$  при  $h_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,

$\rho_f = \rho_* = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $E = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ,  $\Omega = 10 \text{ сек}^{-1}$ , когда функция  $g(x)$  определяется формулой (4), что соответствует варианту резиновой трубки, заполненной водой. Такая схематизация представляется весьма важной, так как вода определяющим образом влияет на протекание многих физико-химических, биологических и технологических процессов.

Итак

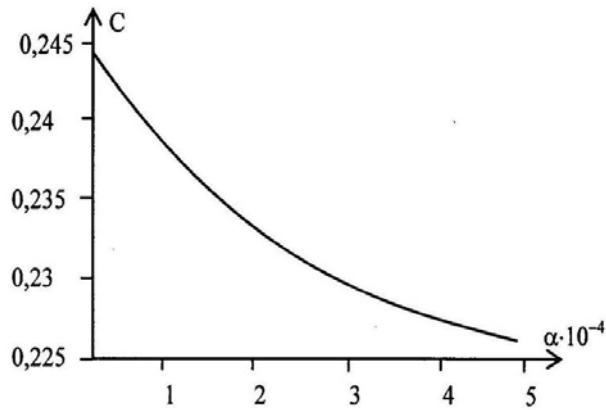
$$\rho = 1, t_0 \sim 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ сек} = \frac{h_0}{c_0}, \left( c_0 = \sqrt{E / \rho_f} \sim 2 \cdot 32 \text{ м / сек} \right),$$

$$\omega = \Omega t_0 \sim 1,6 \cdot 10^{-4}.$$

Поэтому  $\xi^2 \gg \rho\omega^2$ . Следовательно, инерционные члены пренебрежимо малы, за исключением экстремально больших частот. Теперь зависимость (15) с достаточной точностью приближенно можно записать в виде

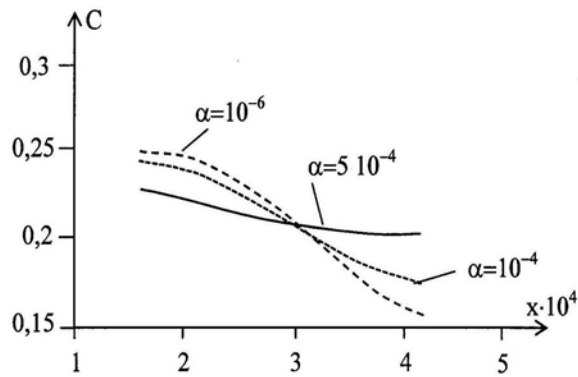
$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\xi(1 + e^{-\alpha x} \sin \beta x)}.$$

Отсюда имеем, что при фиксированных  $\beta$  и  $x$  для принятого типа шероховатости при возрастании  $\alpha$   $c \sim \sqrt{\xi} \approx 0,224$ . Результаты последующих численных расчетов согласуются с приведенным выше утверждением.



**Рис.1.** Кривая зависимости скорости распространения волны от параметра  $\alpha$  при  $\beta = 10^{-4}$  и  $x = 4 \cdot 10^3$ .

На рис.1 приведена кривая зависимости скорости волны  $c$  от параметра  $\alpha$  при значении параметра периодичности распределения шероховатости  $\beta = 10^{-4}$  для сечения трубки  $x = 4 \cdot 10^3$ . Отсюда можно заключить, что с увеличением  $\alpha$  происходит уменьшение скорости (около 8%).



**Рис.2.** Кривая распределения скорости распространения волны при  $\beta = 10^{-4}$

На рис.2 дано распределение скорости вдоль ограниченного участка трубки для трех различных значений  $\alpha = 10^{-6}$ ;  $10^{-4}$ ;  $5 \cdot 10^{-4}$  при  $\beta = 10^{-4}$ . Эти кривые показывают, что соответствующие графики становятся более пологими с ростом параметра  $\alpha$ . При этом максимальная разница значений скорости при фиксированном  $x = 4,5 \cdot 10^4$  оказалась порядка 34%.

**Заключение.** Из изложенного выше следует, что в работе получено аналитическое решение задачи о волновом течении идеальной несжимаемой жидкости в упругой трубке с учетом шероховатости внутренней стенки. Численно выявлено влияние типа шероховатости на скорость распределения волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гидродинамика кровообращения. Сборник переводов / Под ред. С.А.Регирера. М.:Мир, 1971, 269 с.
2. Лайтфут Э. Явления переноса в живых системах. М.: Мир, 1977, 520 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979, 320 с.
4. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983, 400с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т1. М.: Наука, 1976, 535с.
6. Амензаде Р.Ю. Аналитические решения задачи о волновом течении вязко-упругой жидкости в упругой трубке с учетом эффекта сужения // ДАН, 2008, т.418, №3, с.327-330.
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.

#### DAXİLİ DİVARI KƏLƏ-KÖTÜR OLAN ELASTİKİ BORUDA MAYENİN DALĞAVARI AXINI

F.A.ABDULLAYEV, R.Y.ƏMƏNZADƏ, M.B.AXUNDOV

#### XÜLASƏ

Daxili divarın kələ-kötürlüyünü nəzərə almaqla, yarımsonsuz, elastiki, nazikdivarlı boruda ideal, sıxılmayan mayenin pulsvari axını haqqında birölçülü xəttləşdirilmiş məsələnin dəqiq analitik həlli verilmişdir. Qoyulan məsələ Şturm-Liuvill sinqulyar sərhəd məsələsinin həllinə gətirir, o isə öz növbəsində Volterra tipli inteqral tənliyə gətirilir. Təzyiqi, mayenin sürətini və yerdəyişməni təsvir etmək üçün borunun ucunda pulsvari təzyiq verilmişdir. Divarın kələ-kötürlüyünün dalğanın yayılma sürətinə təsiri ədədi müəyyənləşdirilmişdir.

**Açar sözlər:** kələ-kötürlük, dalğa sürəti, Şturm-Liuvill sinqulyar sərhəd məsələsi, Volterranın inteqral tənliyi, Veyerştrass əlaməti.

**THE WAVE OF THE FLUID IN THE ELASTIC TUBE  
WITH A ROUGHENED INTERIOR WALL**

**F.A.ABDULLAYEV, R.Yu.AMENZADEH, M.B.AKHUNDOV**

**SUMMARY**

The paper presents an exact analytical solution of one-dimensional linearized problem of a pulsating flow of an ideal incompressible fluid in a semi-infinite elastic thin-walled tube, taking into account the effect of roughness of the inner wall. The task leads to the solution of a singular boundary value problem of the Sturm-Liouville problem, which in turn reduces to an integral equation of Volterra type. To describe the pressure, velocity and displacement of the liquid at the end of the tube, there is given a pulsating pressure. The effect of roughness on the velocity of the wave propagation is numerically identified.

**Key words:** surface roughness, the wave velocity, Sturm-Liouville singular boundary value problem, integral equation of Volterra, Weierstrass sign.

*Поступила в редакцию: 02.03.2015 г.*

*Подписано к печати: 20.04.2015 г.*